ΘΕΩΡΗΜΑ

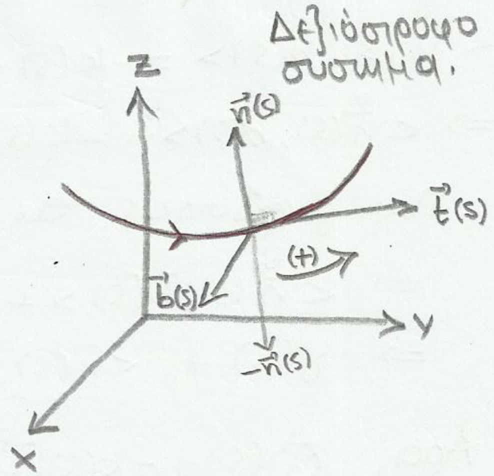
Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $k(s)>0$ και $\{\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet κατά μήκος της c. Τότε ισχύουν οι σχέσεις (τύποι Frenet-Serret):

(F.1): $\mathring{\vec{t}} = k \cdot \vec{n}$

(F.2): $\mathring{\vec{n}} = -k\vec{t} + \tau \cdot \vec{b}$

(F.3): $\mathring{\vec{b}} = -\tau \cdot \vec{n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



(F.1): Από τον ορισμό του $\vec{n}(s)$, ισχύει:

$$\vec{n}(s) = \frac{\mathring{\mathring{c}}(s)}{\|\mathring{\mathring{c}}(s)\|} = \frac{\mathring{\mathring{c}}(s)}{k(s)} = \frac{\mathring{\vec{t}}(s)}{k(s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathring{\vec{t}}(s) = k(s) \cdot \vec{n}(s) \Rightarrow \mathring{\vec{t}} = k \cdot \vec{n}$$

Όπου $\vec{n}(s)$: το κύριο ορθομοναδιαίο της καμπύλης c.

(F.2) Επειδή, $\forall s \in I$ τα διανύσματα $\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)$ αποτελούν την ορθομοναδιαία βάση, τότε θα υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $a, \beta, \gamma : I \to \mathbb{R}$, τ.ω.:

$$\mathring{\vec{n}}(s) = a(s) \cdot \vec{t}(s) + \beta(s) \cdot \vec{n}(s) + \gamma(s) \cdot \vec{b}(s), \quad \forall s \in I$$

• Πολ/με με $\vec{t}(s)$ (εσωτερικώς):

$$\langle \mathring{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle = a(s) \cdot \underbrace{\langle \vec{t}(s), \vec{t}(s) \rangle}_{1} + \beta(s) \underbrace{\langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \rangle}_{0} + \gamma(s) \underbrace{\langle \vec{b}(s), \vec{t}(s) \rangle}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \mathring{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle = a(s) \cdot 1 + \beta(s) \cdot 0 + \gamma(s) \cdot 0 = a(s)$$

Έτσι, παραγωγίζοντας την σχέση $\langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \rangle = 0$ παίρνουμε

$$\langle \vec{n}(s), \vec{t}(s) \rangle^{\circ} = \langle \mathring{\vec{n}}(s), \vec{t}(s) \rangle + \langle \vec{n}(s), \mathring{\vec{t}}(s) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle \vec{n}(s), \mathring{\vec{t}}(s) \rangle + a(s) = 0 \Rightarrow \langle \vec{n}(s), k(s) \cdot \vec{n}(s) \rangle = -a(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -k(s) \cdot 1 = a(s) \Rightarrow \boxed{a(s) = -k(s)}$$

Άρα, $\mathring{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \beta(s)\vec{n}(s) + \gamma(s) \cdot \vec{b}(s)$, $s \in I$

• Πολ/με με $\vec{n}(s)$ (εσωτερικά):

$$<\overset{\circ}{\vec{n}}(s),\vec{n}(s)> = -k(s)<\cancelto{0}{\vec{t}(s),\vec{n}(s)}> + \beta(s)<\cancelto{1}{\vec{n}(s),\vec{n}(s)}> + \gamma(s)<\cancelto{0}{\vec{b}(s),\vec{n}(s)}>$$

$$\Rightarrow <\overset{\circ}{\vec{n}}(s),\vec{n}(s)> = -k(s)\cdot 0 + \beta(s)\cdot 1 + \gamma(s)\cdot 0 = \beta(s)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση $<\vec{n}(s),\vec{n}(s)>=1 \Rightarrow <\overset{\circ}{\vec{n}}(s),\vec{n}(s)>=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta(s)=0$.

Άρα, $\overset{\circ}{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + 0\cdot\vec{n}(s) + \gamma(s)\cdot\vec{b}(s), \ \forall s\in I$

• Πολ/με με $\vec{b}(s)$ (εσωτερικά)

$$<\overset{\circ}{\vec{n}}(s), b(s)> = -k(s)<\cancelto{0}{\vec{t}(s),\vec{b}(s)}> + \gamma(s)<\cancelto{1}{\vec{b}(s),\vec{b}(s)}> \Rightarrow$$

$$\Rightarrow <\overset{\circ}{\vec{n}}(s), b(s)> = -k(s)\cdot 0 + \gamma(s)\cdot 1 = \gamma(s)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση $<\vec{n}(s),\vec{b}(s)>=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow <\overset{\circ}{\vec{n}}(s),\vec{b}(s)> + <\vec{n}(s),\overset{\circ}{\vec{b}}(s)> = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma(s) + <\vec{n}(s),\overset{\circ}{\vec{b}}(s)> = 0 \Rightarrow \gamma(s) = \underbrace{-<\vec{n}(s),\overset{\circ}{\vec{b}}(s)>}_{\tau(s)\,=\,\text{Μια ποσότητα}}$$

Άρα, $\overset{\circ}{\vec{n}}(s) = -k(s)\cdot\vec{t}(s) + \tau(s)\cdot\vec{b}(s)$

Ακόμα, δεν γνωρίζουμε τι είναι το $\tau(s)$.

$$(F.3): \quad \vec{b}(s) = \vec{t}(s)\times\vec{n}(s) \xrightarrow{d/ds} \overset{\circ}{\vec{b}}(s) = \overset{\circ}{\vec{t}}(s)\times\vec{n}(s) + \vec{t}(s)\times\overset{\circ}{\vec{n}}(s) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[(F.2)]{(F.1)} \overset{\circ}{\vec{b}}(s) = \cancelto{0}{k(s)\vec{n}(s)\times\vec{n}(s)} + \vec{t}(s)\times(-k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s))$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\vec{b}}(s) = -k(s)\cancelto{0}{\vec{t}(s)\times\vec{t}(s)} + \tau(s)\vec{t}(s)\times\vec{b}(s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\circ}{\vec{b}}(s) = \tau(s)\underbrace{\vec{t}(s)\times\vec{b}(s)}_{-\vec{n}(s)\ \text{(Αφού ορίστηκε δεξιόστροφα)}} = -\tau\cdot\vec{n}$$

όπου κατανοητό πλέον, ότι:

η ποσότητα $\tau(s)$ είναι η στρέψη της καμπύλης c. με ορθοκανονική βάση $\{\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s)\}\subseteq\mathbb{R}^3$.